Dantzer,
p538, Ex 28.3

RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE
(par séries entière puis par changement de variable)

Soit $\omega \in \mathbb{R}$. On s'intéresse à l'équation $(E) : xy'' + 2y' - \omega^2 xy = 0$

L'intervalle I désignera $\mathbb{R}^{+*}$ ou $\mathbb{R}^{-*}$.

- Supposons que (E) admet sur $\mathbb{R}$ une solution développable en série entière au voisinage de 0.

Notons-la $y : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. L'équation (E) se ramène alors à :

$$0 = xy''(x) + 2y'(x) - \omega^2 x y(x) = x \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \omega^2 x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)a_{n+1}x^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n - \omega^2 \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^n$$

$$= 2a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[n(n+1)a_{n+1} + 2(n+1)a_{n+1} - \omega^2 a_{n-1}\right] x^n$$

i.e. $a_1 = 0$ et $\forall n \geq 1, \ (n+2)(n+1)a_{n+1} - \omega^2 a_{n-1} = 0$

De là, $\forall p \in \mathbb{N}, \ a_{2p+1} = 0$ (i.e. y est paire) et $\forall p \in \mathbb{N}, \ a_{2p} = \frac{\omega^{2p}}{(2p+1)!} a_0$.

Donc $y(x) = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\omega^{2n}}{(2n+1)!} x^{2n}$, donc $\omega x y(x) = a_0 \operatorname{sh}(\omega x)$ (et $R(a_n) = +\infty$).

Finalement, $\boxed{y(0) = a_0 \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}^*, \ y(x) = a_0 \frac{\operatorname{sh}(\omega x)}{\omega x}}$ (qui est bien continue en 0).

- Soit $y \in C^2(I,\mathbb{R})$. Sur I, posons $y_0 : x \longmapsto \frac{\operatorname{sh}(\omega x)}{x}$ et $z : x \longmapsto \frac{y(x)}{y_0(x)}$. Ces fonctions sont deux fois dérivables sur I, et :

$$0 = xy''(x) + 2y'(x) - \omega^2 x y(x)$$

$$= x\left[z''(x)y_0(x) + 2y_0'(x)z'(x) + z(x)y_0''(x)\right] + 2\left[z'(x)y_0(x) + z(x)y_0'(x)\right] - \omega^2 x\, z(x)\, y_0(x).$$

$$= x\, z''(x) y_0(x) + z'(x)\left[2y_0(x) + 2x\, y_0'(x)\right] + z(x) \underbrace{\cancel{\left[xy_0''(x) + 2y_0'(x) - \omega^2 x y_0(x)\right]}}_{=0}$$

De là, $y \in S_I(E) \iff z' \in S_I\left(z'' = -2\left(\frac{y_0'}{y_0} + \frac{1}{x}\right)z'\right) = \left\{x \longmapsto \frac{K}{(xy_0(x))^2} : K \in \mathbb{R}\right\}$

$$\iff z' \in \left\{x \longmapsto \frac{K}{\operatorname{sh}(\omega x)^2} : K \in \mathbb{R}\right\}.$$

Pour $z(x) = \frac{\operatorname{ch}(\omega x)}{\operatorname{sh}(\omega x)}$, on a $z'(x) = \frac{-\omega}{\operatorname{sh}(\omega x)^2}$, donc d'après ce qui précède, $y(x) = \frac{\operatorname{ch}(\omega x)}{x}$ convient.

Comme $x \longmapsto \frac{\operatorname{sh}(\omega x)}{x}$ et $x \longmapsto \frac{\operatorname{ch}(\omega x)}{x}$ sont linéairement indépendantes, et comme $\dim(S_I(E)) = 2$, on en déduit que $\boxed{S_I(E) = \left\{x \longmapsto \frac{\lambda \operatorname{sh}(\omega x) + \mu \operatorname{ch}(\omega x)}{x} : (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}}$